

2.2

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Στατιστικός πίνακας : Πίνακας με στήλες και γραμμές στις οποίες αναγράφονται οι πληροφορίες που συλλέξαμε για μια έρευνα.

2.

Διάκριση στατιστικών πινάκων : Γενικοί και ειδικοί.
Ο γενικός πίνακας περιέχει όλες τις πληροφορίες, ενώ ο ειδικός περιέχει μέρος των πληροφοριών γενικού πίνακα

3.

Περιεχόμενο στατιστικού πίνακα :

- α) Τίτλος
- β) Επικεφαλίδες γραμμών και στηλών
- γ) Κύριο σώμα
- δ) Πηγή πληροφοριών

4.

Συμβολισμοί :

n το μέγεθος του δείγματος (το πλήθος των στοιχείων του)

x_i τιμή της μεταβλητής

v_i **συχνότητα** της τιμής x_i

Δηλώνει το πλήθος εμφάνισης της τιμής x_i

f_i **σχετική συχνότητα** της τιμής x_i

$$\text{Είναι } f_i = \frac{v_i}{n}$$

$f_i \%$ **σχετική συχνότητα της τιμής x_i επί τοις εκατό**

$$\text{Είναι } f_i \% = 100 f_i$$

(x_i, v_i) **κατανομή συχνοτήτων**

Αποτελούν συντεταγμένες σημείων.

(x_i, f_i) **κατανομή σχετικών συχνοτήτων**

Αποτελούν συντεταγμένες σημείων.

$(x_i, f_i \%)$ **κατανομή σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό**

Αποτελούν συντεταγμένες σημείων.

N_i **αθροιστική συχνότητα**

$$\text{Είναι } N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$$

Δηλώνει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι $\leq$ της τιμής x_i

F_i **αθροιστική σχετική συχνότητα**

$$\text{Είναι } F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

$F_i \%$ **αθροιστική σχετική συχνότητα επί τοις εκατό.**

$$\text{Είναι } F_i \% = 100 F_i$$

5.

Πίνακας κατανομής συχνοτήτων : Πίνακας με στήλες που αντιστοιχούν στις $x_i, v_i, f_i, f_i \%, N_i, E_i, E_i \%$

6.

Τυπολόγιο : $v_1 + v_2 + \dots + v_k = v$

$$f_i = \frac{v_i}{v}$$

$$0 \leq f_i \leq 1$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

$$f_i \% = 100 f_i$$

$$f_1 \% + f_2 \% + \dots + f_k \% = 100$$

$$E_i \% = 100 E_i$$

$$N_i = N_{i-1} + v_i$$

$$E_i = E_{i-1} + f_i \quad \text{και} \quad E_i \% = E_{i-1} \% + f_i \%$$

7.

Γραφικές παραστάσεις κατανομής συχνοτήτων

α) Ραβδόγραμμα : Μόνο για ποιοτική μεταβλητή.

Είναι σύστημα αξόνων με ράβδους ίσου πλάτους.

Ο άξονας των τετμημένων έχει τις τιμές x_i και ο άξονας των τεταγμένων κάποια από τις συχνότητες.

Το ύψος κάθε ράβδου είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα

β) Διάγραμμα συχνοτήτων : Μόνο για ποσοτική μεταβλητή.

Είναι ό,τι και το ραβδόγραμμα, γράφοντας ευθύγραμμα τμήματα αντί για ράβδους.

γ) Κυκλικό διάγραμμα : Για ποσοτική και ποιοτική μεταβλητή.

Χωρίζουμε ένα κυκλικό δίσκο σε κυκλικούς τομείς, των οποίων τα εμβαδά ή τα αντίστοιχα τόξα α_i είναι ανάλογα προς τις συχνότητες.

$$\text{Ισχύει } \alpha_i = v_i \frac{360^\circ}{v} = 360^\circ \frac{v_i}{v} = 360^\circ f_i$$

δ) Σημειόγραμμα : Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις.

Είναι οριζόντιος άξονας των x_i , σημειώνοντας κατακόρυφα πάνω από κάθε τιμή τόσες τελείες όση είναι η αντίστοιχη συχνότητα.

ε) Χρονόγραμμα : Μόνο για μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο.

Είναι σύστημα αξόνων.

Ο άξονας των τετμημένων έχει τις τιμές t_i του χρόνου και ο άξονας των τεταγμένων κάποια από τις συχνότητες.

8.

Κλάση: Ομάδα τιμών x_i , που ανήκουν σε ένα μόνο διάστημα της μορφής $[,)$

Η κλάση λειτουργεί σαν τιμή της μεταβλητής.

Αντί για συχνότητα τιμής έχουμε **συχνότητα κλάσης**.

Τα άκρα των διαστημάτων $[,)$ λέγονται **όρια** των κλάσεων.

Πλάτος κλάσης λέγεται η διαφορά των ορίων της.

Κεντρική τιμή κλάσης λέγεται το ημιάθροισμα των ορίων της.

Συχνότητα κεντρικής τιμής $\equiv$ συχνότητα κλάσης.

9.

Ιστόγραμμα συχνοτήτων : Ιστοί πλάτους ίσου με τα πλάτη των κλάσεων και ύψους τέτοιου ώστε το εμβαδόν κάθε ιστού να είναι ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

10.

Πολύγωνο συχνοτήτων : Το πολύγωνο που έχει κορυφές τα **μέσα** των άνω βάσεων των ιστών, αφού προηγουμένως προσθέσουμε εκατέρωθεν των κλάσεων, δύο κλάσεις με μηδενική συχνότητα.

11.

Πολύγωνο συχνοτήτων : Το πολύγωνο που έχει κορυφές τα **δεξιά άκρα** των άνω βάσεων των ιστών και τα σημεία $(x_1, 0)$, (x_v, F_v) .

12.

Η ιδιότητα του πολυγώνου : Το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ισούται με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος n του δείγματος.

13.

Καμπύλη συχνοτήτων : Όταν το **πλήθος των κλάσεων είναι πολύ μεγάλο** και το **πλάτος τους πολύ μικρό**, η περίμετρος του πολυγώνου συχνοτήτων, εκτός από τη βάση του, μετατρέπεται σε καμπύλη.

14.

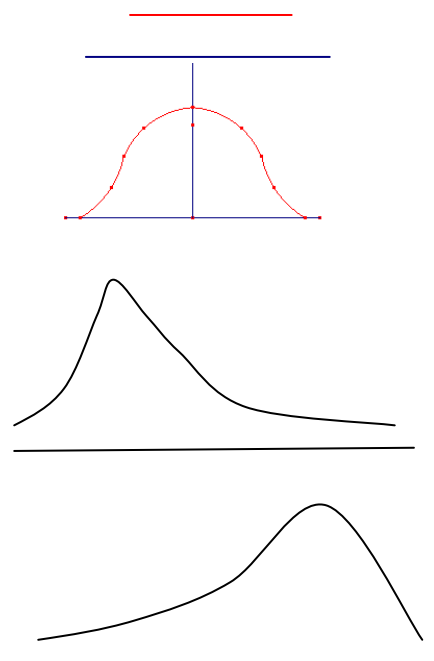
Χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων :

Ομοιόμορφη κατανομή συχνοτήτων

Κανονική κατανομή συχνοτήτων

Ασύμμετρη κατανομή με θετική ασυμμετρία

Ασύμμετρη κατανομή με αρνητική ασυμμετρία



ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Στον πίνακα κατανομής συχνοτήτων : Τοποθετούμε τις τιμές x_i σε αύξουσα σειρά.

2.

Στις συχνότητες :

$$\begin{aligned} N_1 &= v_1 \\ N_2 &= N_1 + v_2 = v_1 + v_2 \\ N_3 &= N_2 + v_3 = v_1 + v_2 + v_3 \\ &\vdots \\ N_k &= N_{k-1} + v_k = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 \\ F_2 &= F_1 + f_2 = f_1 + f_2 \\ F_3 &= F_2 + f_3 = f_1 + f_2 + f_3 \\ &\vdots \\ F_k &= F_{k-1} + f_k = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = 1 \end{aligned}$$

3.

Μια επισημάνση : Ραβδόγραμμα κατασκευάζουμε για ποιοτική μεταβλητή.
Διάγραμμα κατασκευάζουμε για ποσοτική μεταβλητή.

4.

Για να σχεδιάσω ραβδόγραμμα :

- α) Δύο κάθετους άξονες
- β) Στον οριζόντιο τις τιμές x_i και στον κατακόρυφο τις συχνότητες
- γ) Πάνω από κάθε τιμή x_i μία ράβδο ύψους όση η συχνότητα.

* Πολλές φορές ο ρόλος των αξόνων αντιστρέφεται.

5.

Για να σχεδιάσω διάγραμμα : Ίδια δουλειά με το ραβδόγραμμα μόνο που τον ρόλο των ράβδων τον παίζουν ευθύγραμμα τμήματα.

6.

Για να σχεδιάσω κυκλικό διάγραμμα : Χωρίζω έναν κυκλικό δίσκο σε κυκλικούς τομείς, των οποίων τα εμβαδά ή τα τόξα α_i να είναι ανάλογα των συχνοτήτων.

7.

Για να σχεδιάσω χρονόγραμμα :

- α) Δύο κάθετους άξονες
- β) Στον οριζόντιο τις τιμές t_i του χρόνου και στον κατακόρυφο τις συχνότητες.
- γ) Με τεθλασμένη γραμμή ενώνω τα σημεία (t_i, v_i) ή (t_i, f_i) .

8.

Για την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων

- α) Κάθε τιμή να ανήκει σε μία μόνο κλάση.
- β) Οι κλάσεις να είναι κλειστές αριστερά και ανοιχτές δεξιά.
- γ) Οι τιμές σε κάθε κλάση θεωρούμε ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, οπότε κάθε κλάση αντιπροσωπεύεται από την κεντρική της τιμή.
- δ) Συχνότητα κλάσης είναι το πλήθος των παρατηρήσεων που ανήκουν σ' αυτή.

9.

Για να δημιουργήσουμε τις κλάσεις

- α) Βρίσκουμε το εύρος R της κατανομής.
- β) Καθορίζουμε το πλήθος των κλάσεων σύμφωνα με τον πίνακα.
- γ) Βρίσκουμε το πλάτος των κλάσεων διαιρώντας το εύρος με το πλήθος των κλάσεων και στρογγυλεύοντας προς τα πάνω.
- δ) Κατασκευάζουμε τις κλάσεις ξεκινώντας από τη μικρότερη τιμή και προσθέτοντας το πλάτος κλάσης διαδοχικά μέχρι να φθάσουμε στη μεγαλύτερη τιμή.

Μέγεθος δείγματος n	Πλήθος κλάσεων
< 20	5
20 - 50	6
50 - 100	7
100 - 200	8
200 - 400	9
400 - 700	10
700 - 1000	11
≥ 1000	12

10.

Στα ομαδοποιημένα δεδομένα : οι κεντρικές τιμές των διαδοχικών κλάσεων έχουν διαφορά ίση με το πλάτος της κλάσης .

11.

Για να σχεδιάσω ιστόγραμμα :
(συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων)

- α) Δύο κάθετους άξονες
- β) Στον οριζόντιο τα άκρα των κλάσεων και στον κατακόρυφο τις συχνότητες
- γ) Με βάση κάθε κλάση σχεδιάζω ορθογώνιο του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με την συχνότητα της κλάσης.

- * Όταν οι κλάσεις έχουν ίδιο πλάτος, θεωρούμε το πλάτος αυτό ως μονάδα μήκους, οπότε το **εμβαδόν του ορθογωνίου** θα ισούται αριθμητικά με το **ύψος του**.
- * * Το **άθροισμα των εμβαδών** όλων των ορθογωνίων θα είναι ίσο με το **άθροισμα όλων των συχνοτήτων** δηλαδή ίσο με το **μέγεθος n** του δείγματος.
- * * * **Για να συμπληρώσω το πολύγωνο συχνοτήτων :**
 - α) Εκατέρωθεν του συνόλου των κλάσεων θεωρώ δύο κλάσεις με συχνότητα μηδέν
 - β) Σημειώνω τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων και τα συνδέω με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα.

12.

Για να σχεδιάσω ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων:

Ακολουθώ το (11) θέτοντας στον κατακόρυφο άξονα την αθροιστική συχνότητα.

- * Το εμβαδόν του **τελευταίου ορθογωνίου** θα είναι ίσο με το **μέγεθος n** του δείγματος.
- * * **Για να συμπληρώσω το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων :**
Συνδέω με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τις δεξιά – άνω κορυφές των ορθογωνίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Οι βαθμοί στα μαθηματικά 40 μαθητών ενός Λυκείου είναι οι

15, 16, 10, 12, 12, 15, 20, 17, 10, 13,
 12, 12, 14, 14, 19, 18, 09, 09, 09, 16,
 20, 18, 17, 17, 15, 15, 13, 13, 10, 20,
 20, 02, 04, 06, 14, 14, 16, 16, 20, 20

- i) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων με στήλες x_i , v_i , f_i , $f_i\%$, N_i , F_i , $F_i\%$
- ii) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό τουλάχιστον 15
- iii) Να βρείτε το ποσοστό μαθητών που έχει βαθμό το πολύ 10
- iv) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 18
- v) Αν στο 12,5% δοθεί έπαινος τι βαθμό θα πρέπει να έχει ένας μαθητής για να πάρει έπαινο;

Λύση

i)

Βαθμοί x_i	Συχνοτητ v_i	Σχ.συχντ f_i	Σχ.συχν. $f_i\%$	Αθρ.συχ v N_i	Σχ.αθρ.σχ F_i	Σχ.αθρ.σχ $F_i\%$
02	1	0,025	2,5	1	0,025	2,5
04	1	0,025	2,5	2	0,050	5
06	1	0,025	2,5	3	0,075	7,5
09	3	0,075	7,5	6	0,150	15
10	3	0,075	7,5	9	0,225	22,5
12	4	0,100	10	13	0,325	32,5
13	3	0,075	7,5	16	0,400	40
14	4	0,100	10	20	0,500	50
15	4	0,100	10	24	0,600	60
16	4	0,100	10	28	0,700	70
17	3	0,075	7,5	31	0,775	77,5
18	2	0,050	5	33	0,825	82,5
19	2	0,050	5	35	0,875	87,5
20	5	0,125	12,5	40	1	100
Σύνολο	40	1,00	100	-----	-----	-----

ii)

Από τη στήλη των συχνοτήτων v_i βρίσκουμε

$$4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 5 = 20 \text{ μαθητές}$$

iii)

Από την στήλη των σχ. αθρ. συχνοτήτων $F_i\%$ βρίσκουμε 22,5

iv)

Από την στήλη των συχνοτήτων βρίσκουμε
 $4 + 3 + 4 + 4 + 4 + 3 = 22$ μαθητές

v)

Από την στήλη των σχ. συχν. $f_i\%$ βρίσκουμε ότι το 12,5% έχει βαθμό 20 άρα για να πάρει έπαινο ο μαθητής θα πρέπει να έχει βαθμό 20.

2.

Η μεταβλητή X παίρνει τιμές x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$.

Οι αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες είναι : $N_1 = 30, N_2 = 70, N_3 = 120$.

Ποια είναι η σχετική συχνότητα των τιμών x_1, x_2 και x_3 ;

Λύση

Αφού η αθροιστική συχνότητα N_3 της μεγαλύτερης τιμής x_3 είναι $N_3 = 120$, το μέγεθος του δείγματος θα είναι $n = 120$.

Σχόλιο 2

Επίσης αφού η αθροιστική συχνότητα της μικρότερης τιμής x_1 είναι $N_1 = 30$, η συχνότητα της τιμής x_1 θα είναι $n_1 = 30$.

$$\begin{aligned} N_2 = 70 & \Leftrightarrow n_1 + n_2 = 70 \\ 30 + n_2 &= 70 \\ n_2 &= 40 \end{aligned}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n \Leftrightarrow 30 + 40 + n_3 = 120 \Leftrightarrow n_3 = 50$$

$$f_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{30}{120} = 0,25$$

$$f_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{40}{120} = 0,33$$

$$f_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{50}{120} = 0,42$$

3.

Μία μεταβλητή X παίρνει τις τιμές x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$.

Αν $F_2 = 0,6$ να βρεθεί η σχετική συχνότητα της τιμής x_3 .

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $F_3 = F_2 + f_3$.

Σχόλιο 2

Όμως η σχετική αθροιστική συχνότητα της μεγαλύτερης τιμής x_3 είναι $F_3 = 1$.

$$\text{Οπότε } 1 = 0,6 + f_3 \Leftrightarrow f_3 = 0,4$$

4.

Μία μεταβλητή X έχει τιμές $x_1 < x_2 < x_3$ και αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2, N_3 τέτοιες, ώστε $N_2 = \frac{3}{2} N_1$ και $N_3 = 2N_2$.

Να διατάξετε τις συχνότητες v_1, v_2, v_3 από την μικρότερη στην μεγαλύτερη

Λύση

$$N_2 = \frac{3}{2} N_1 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = \frac{3}{2} v_1 \Leftrightarrow$$

$$v_2 = \frac{3}{2} v_1 - v_1 \Leftrightarrow$$

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 \quad \text{άρα } v_2 < v_1$$

$$N_3 = 2N_2 \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 2(v_1 + v_2)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 2v_1 + 2v_2$$

$$v_3 = v_1 + v_2$$

$$v_3 = v_1 + \frac{1}{2} v_1 = \frac{3}{2} v_1 \quad \text{άρα } v_3 > v_1$$

Οπότε, τελικά είναι $v_2 < v_1 < v_3$.

Σχόλιο 2

5.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πλήθος και το είδος των μεταλλίων που κατέκτησαν σ' ένα παγκόσμιο πρωτάθλημα οι τρεις πρώτες χώρες

Χώρα	χρυσά	αργυρά	χάλκινα	σύνολο
ΗΠΑ	3	7	9	19
ΡΩΣΙΑ	2	4	2	8
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	2	0	5	7

Να γίνει το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων ως προς

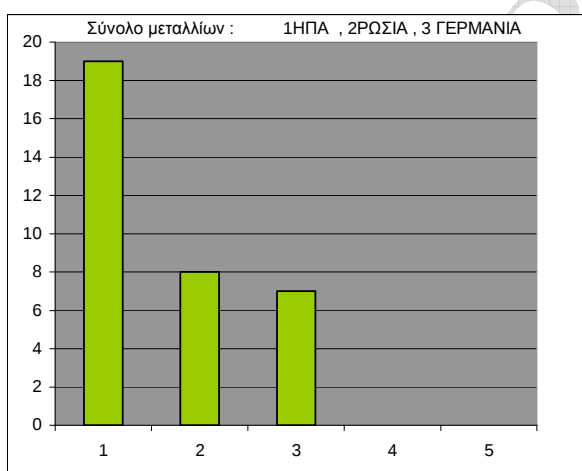
- το σύνολο των μεταλλίων
- τα χάλκινα μέταλλα
- το πλήθος των μεταλλίων ανάλογα με το είδος

Λύση

i)

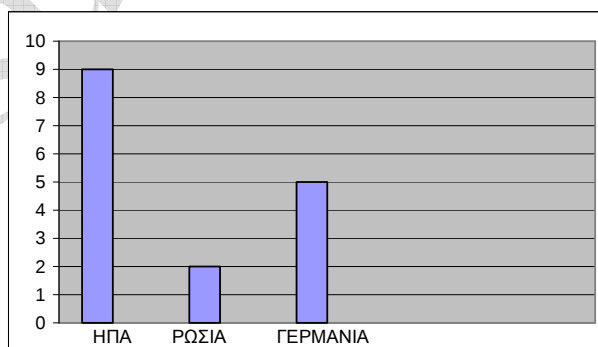
Σχόλιο 4

Ραβδόγραμμα ως προς το σύνολο των μεταλλίων



ii)

Ραβδόγραμμα ως προς τα χάλκινα μέταλλα



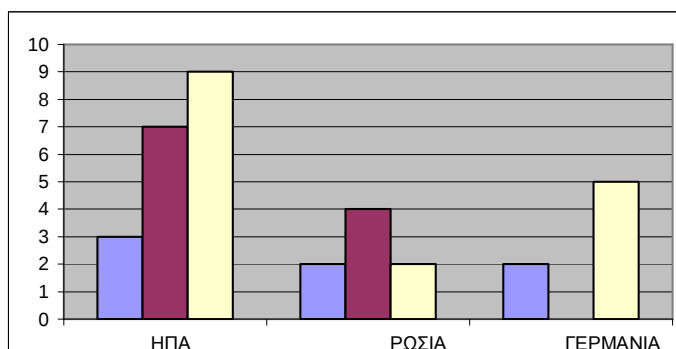
iii)

Ραβδόγραμμα ως προς το πλήθος και το είδος των μεταλλίων

Χρυσά 

Αργυρά 

Χάλκινα 



6.

Σ' ένα δείγμα 200 μαθητών διαπιστώθηκε ότι :

οι 20 μιλούν 3 ξένες γλώσσες

οι 60 μιλούν 2 ,

οι 100 μία

οι 20 καμία .

i) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων

ii) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς επίσης τα πολύγωνα αυτών.

Λύση

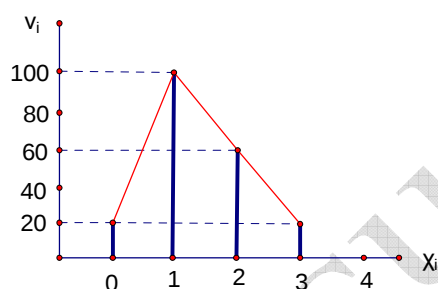
i)

Με στρογγυλοποίηση των δεδομένων, ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι

Πλήθ. ξ. γλ. x_i	Συχν. v_i	Σχετ.συχν. f_i
0	20	0,1
1	100	0,5
2	60	0,3
3	20	0,1
Σύνολο	200	1

ii)

Το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο φαίνονται παρακάτω



Σχόλιο 5

Διάγραμμα ———— πολύγωνο ————

Αν στον κατακόρυφο άξονα βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i τότε θα προκύψει το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο

7.

Να σχεδιάσετε το κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων της άσκησης 6.

Λύση

Προσδιορίζουμε τα τόξα των κυκλικών τομέων.

$$\alpha_1 = 360^\circ \cdot f_1 = 360^\circ \cdot 0,1 = 36^\circ$$

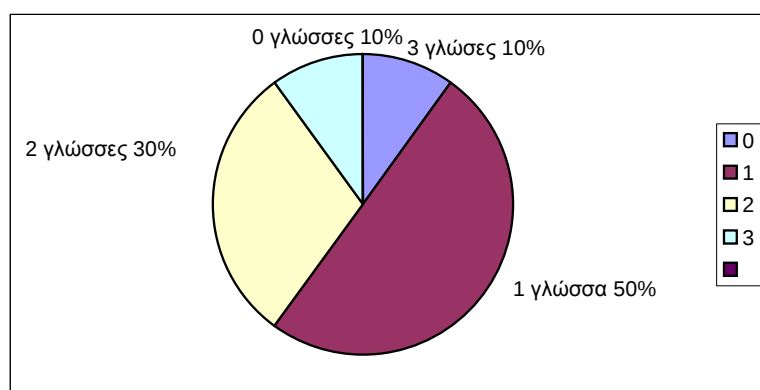
$$\alpha_2 = 360^\circ \cdot f_2 = 360^\circ \cdot 0,5 = 180^\circ$$

$$\alpha_3 = 360^\circ \cdot f_3 = 360^\circ \cdot 0,3 = 108^\circ$$

$$\alpha_4 = 360^\circ \cdot f_4 = 360^\circ \cdot 0,1 = 36^\circ$$

με βάση τις τιμές αυτές έχουμε το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα

Σχόλιο 6



8.

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 10 μαθητές να λύσουν μία άσκηση είναι
2, 3, 3, 5, 2, 5, 5, 4, 4, 4.

Να γίνει το σημειόγραμμα της κατανομής.

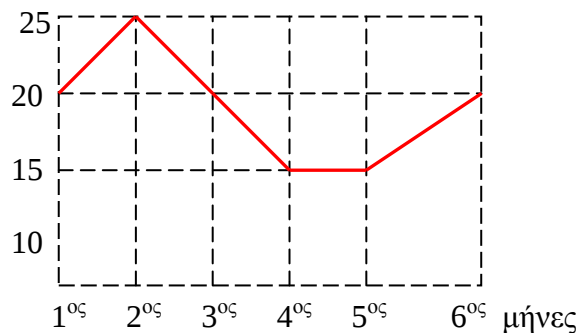
Λύση

			*	*
	*	*	*	*
	*	*	*	*
2	3	4	5	χρόνος σε λεπτά

9.

Η τιμή μιας μετοχής σε € στο χρηματιστήριο ,στο τέλος των έξι πρώτων μηνών ενός έτους ήταν διαδοχικά η εξής 20 , 25 , 20 ,15 , 15 , 20.

Να κατασκευάσετε το χρονόγραμμα.

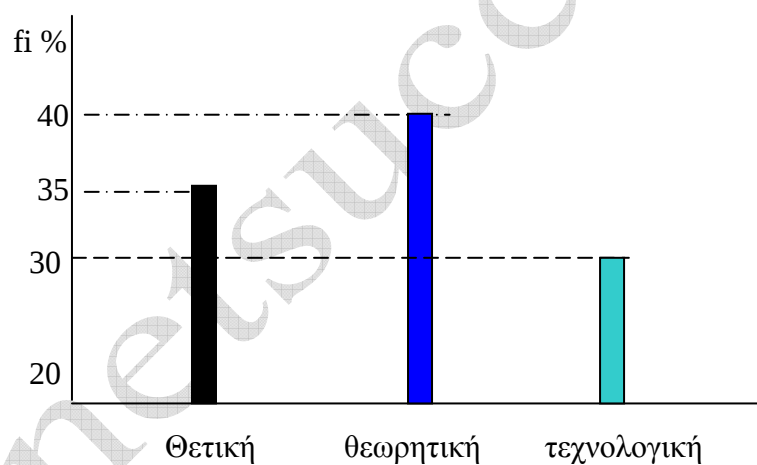
Λύση

Σχόλιο 7

Η κόκκινη τεθλασμένη γραμμή δείχνει την εξέλιξη της τιμής της μετοχής στο πρώτο εξάμηνο

10.

Το παρακάτω ραβδόγραμμα σχετικών επί τις % συχνοτήτων αναφέρεται στις κατευθύνσεις που παρακολουθούν οι μαθητές ενός Λυκείου. Είναι σωστά σχεδιασμένο; Εξηγήστε γιατί.

**Λύση**

Δεν είναι σωστό διότι το άθροισμα των ποσοστών ξεπερνάει το 100 .

11.

Τα βάρη 30 μαθητών σε κιλά είναι :

45, 50, 58, 48, 60, 63, 54, 70, 62, 64,

48, 53, 57, 62, 72, 48, 65, 50, 70, 69,

74, 61, 48, 63, 49, 49, 52, 46, 59, 66.

- i) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις του ίδιου πλάτους
- ii) Να φτιάξετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων με στήλες x_i , v_i , N_i , $f_i\%$, $Fi\%$
- iii) Να Βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βάρος μεγαλύτερο ή ίσο από 47,5 κιλά και μικρότερο από 60
- iv) Ποιο ποσοστό μαθητών έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο από 57,5 και λιγότερο από 67,5 κιλά

Λύση**i)**

Προσδιορίζουμε τις κλάσεις : Εύρος $R = 74 - 45 = 29$

Σχόλιο 9

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 30$,
το πλήθος των κλάσεων θα είναι $k = 6$

Το πλάτος των κλάσεων είναι $c = \frac{29}{6} \cong 5$

ii)

Μετά από αυτά και κάνοντας διαλογή των παρατηρήσεων έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Κλάσεις [,)	Κεντρ τιμή x_i	Συχνότη v_i	Σχ.συχν $fi\%$	Αθρ.συχν N_i	Σχ.αθρ. συχν. $Fi\%$
[45 ,50)	47,5	8	26,7	8	26,7
[50, 55)	52,5	5	16,7	13	43,4
[55 , 60)	57,5	3	10	16	53,4
[60 , 65)	62,5	7	23,3	23	76,7
[65 ,70)	67,5	3	10	26	86,7
[70 ,75)	72,5	4	13,3	30	100
Σύνολο		30	100		

iii)

Μαθητές που έχουν βάρος μεγαλύτερο ή ίσο από 47,5 και λιγότερο από 60 κιλά
τρεις της κλάσης [55 , 60)
πέντε της κλάσης [50 , 55)
και από τους οκτώ μαθητές της κλάσης [45 , 50) θα πάρουμε τους μισούς
δηλαδή τέσσερις , αφού το 47,5 είναι το κέντρο της κλάσης και σε κάθε
κλάση έχουμε δεχτεί ότι οι τιμές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες .

Οπότε οι μισοί έχουν βάρος από 45 έως 47,5 και οι υπόλοιποι μισοί έχουν βάρος
από 47,5 έως 50.

Άρα οι ζητούμενοι μαθητές είναι $3 + 5 + 4 = 12$.

iv)

Για τους ίδιους λόγους το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος μεγαλύτερο ή ίσο
του 57,5 και λιγότερο του 67,5 θα είναι :

το μισό του ποσοστού της κλάσης $[55, 60)$, δηλαδή 5%
το ποσοστό 23,3% της κλάσης $[60, 65)$ και
το μισό του ποσοστού της κλάσης $[65, 70)$, δηλαδή 5% .
Άρα, το ζητούμενο ποσοστό είναι $5 + 23,3 + 5 = 33,3\%$.

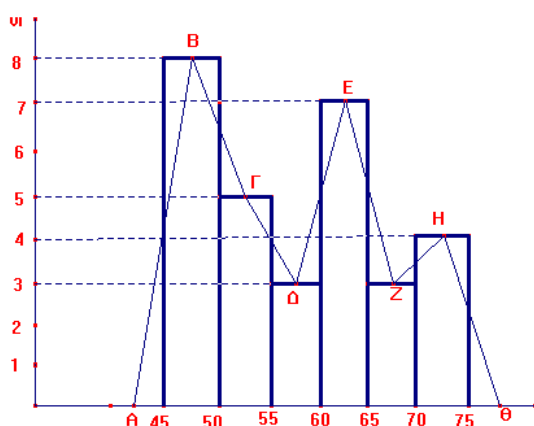
12.

Για τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης να σχεδιαστούν όλα τα ιστογράμματα με τα αντίστοιχα πολύγωνα.

Λύση

i)

Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνοτήτων

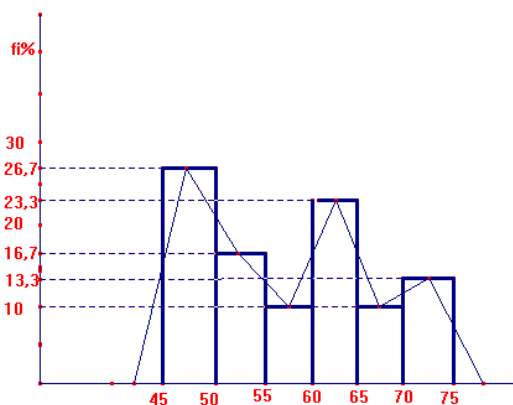


Το πολύγωνο είναι η τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘ

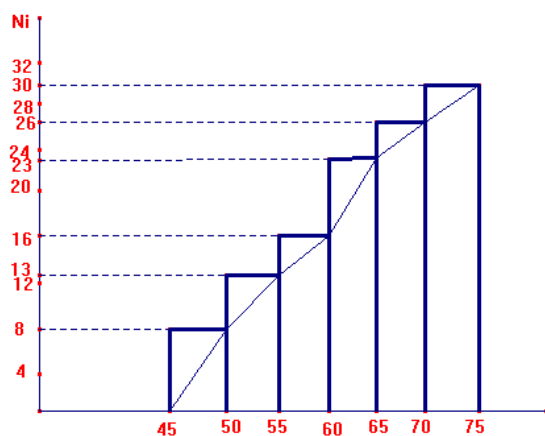
Σχόλια 11

ii)

Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών επί % συχνοτήτων

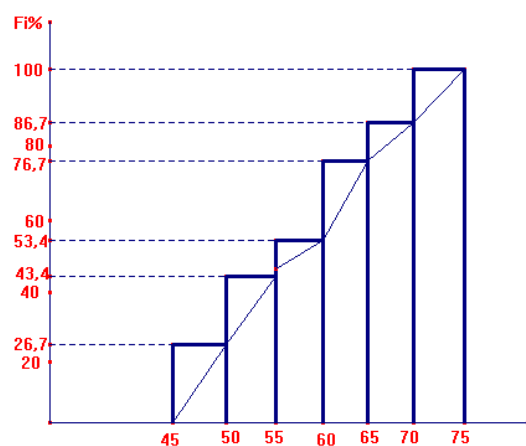


iii) Ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων



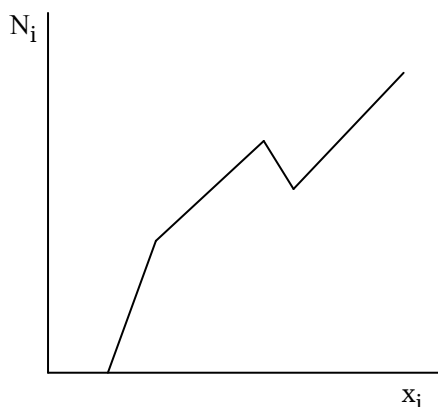
Σχόλια 12

iv) Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων $F_i\%$



13.

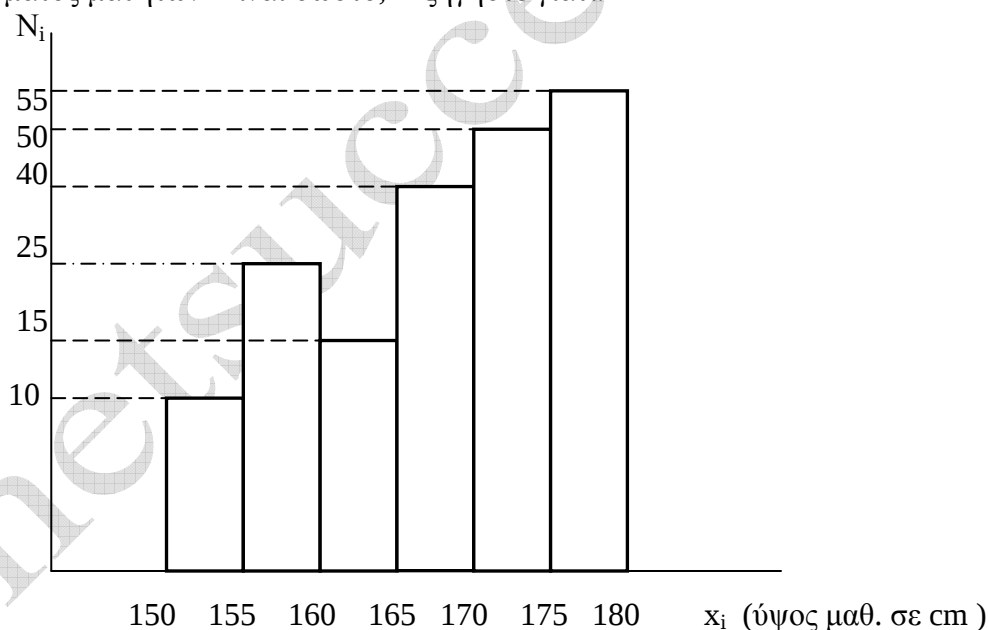
Το παρακάτω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων μίας κατανομής είναι σωστά σχεδιασμένο; Εξηγήστε γιατί.

**Λύση**

Όχι διότι το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων είναι τεθλασμένη γραμμή η οποία συνεχώς ανέρχεται πράγμα που δεν συμβαίνει στο δοσμένο πολύγωνο.

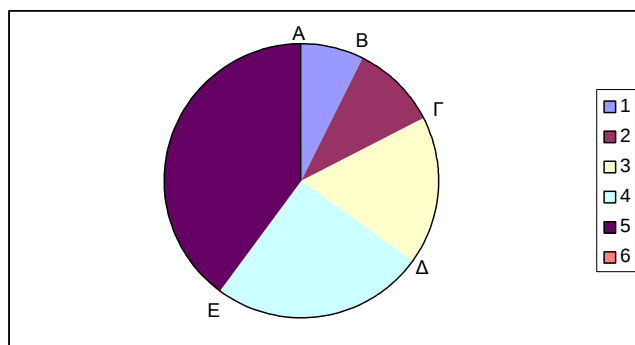
14.

Το παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων N_i αναφέρεται στο ύψος σε cm ενός δείγματος μαθητών. Είναι σωστό; Εξηγήστε γιατί.

**Λύση**

Δεν είναι σωστό γιατί η αθροιστική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι μικρότερη της αθροιστικής συχνότητας της δεύτερης, πράγμα που δεν είναι δυνατόν.

15.



Στο παραπάνω κυκλικό διάγραμμα δίνεται ότι $\widehat{AB} = 27^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 36^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 63^\circ$, $\widehat{\Delta\text{Ε}} = 90^\circ$ και $\widehat{\text{ΕΑ}} = 144^\circ$. Αν το διάγραμμα αναφέρεται στην ομάδα που υποστηρίζει ένα δείγμα 200 ατόμων και ο τομέας με τόξο ΑΕ αφορά τον Ολυμπιακό, με τόξο ΔΕ τον Παναθηναϊκό, με τόξο ΔΓ την ΑΕΚ, με τόξο ΓΒ τον ΠΑΟΚ και με τόξο ΑΒ τον ΑΡΗ, να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων της κατανομής και τα ραβδογράμματα συχνοτήτων και σχετικών επί % συχνοτήτων.

Λύση

Από τον τύπο $\alpha_i = 360^\circ f_i$ θα έχουμε $27^\circ = 360^\circ f_1 \Leftrightarrow f_1 = \frac{27^\circ}{360^\circ} = 0,075$

$$36^\circ = 360^\circ f_2 \Leftrightarrow f_2 = \frac{36^\circ}{360^\circ} = 0,100$$

$$63^\circ = 360^\circ f_3 \Leftrightarrow f_3 = \frac{63^\circ}{360^\circ} = 0,175$$

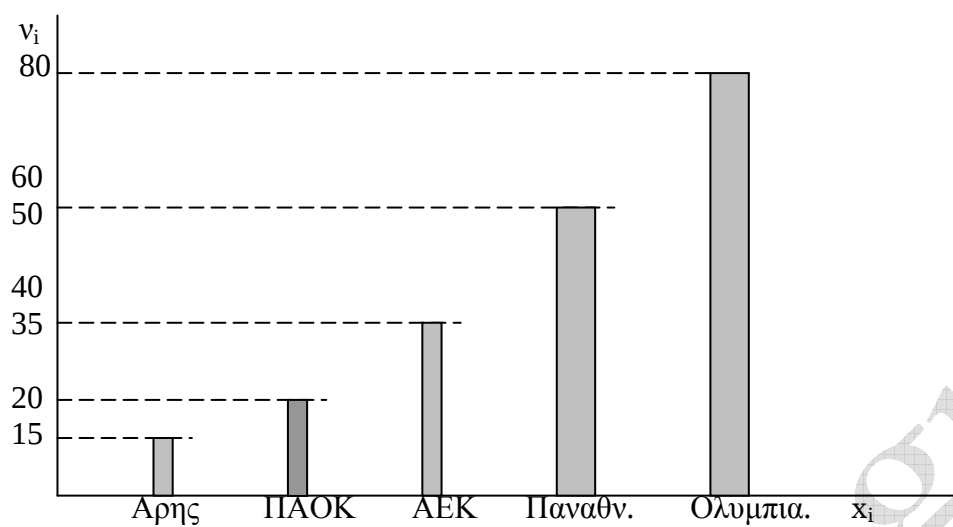
$$90^\circ = 360^\circ f_4 \Leftrightarrow f_4 = \frac{90^\circ}{360^\circ} = 0,250$$

$$144^\circ = 360^\circ f_5 \Leftrightarrow f_5 = \frac{144^\circ}{360^\circ} = 0,400$$

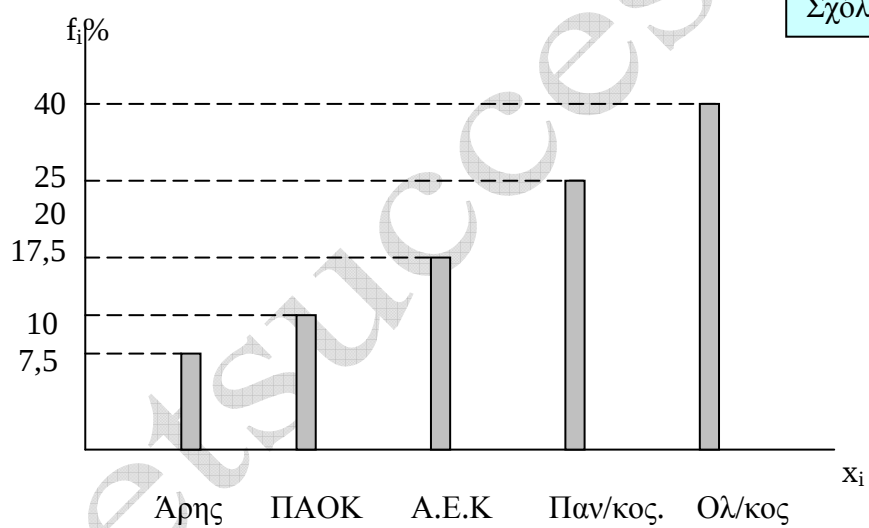
Οπότε ο πίνακας συχνοτήτων είναι

Ομάδα x_i	Συχνот. n_i	Σχετ.συχ $f_i \%$
Αρης	15	7,50
Πάοκ	20	10,00
Α.Ε.Κ	35	17,50
Παναθην	50	25,00
Ολυμπ.	80	40,00
Σύνολο	200	100

Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων είναι



Και το ραβδόγραμμα των σχετικών επί % συχνοτήτων είναι



Σχόλιο 5

16.

Η βαθμολογία 50 μαθητών σ' ένα μάθημα κυμάνθηκε από 10 έως 20. Χωρίζοντας τους 50 βαθμούς σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, παρατηρήσαμε ότι :

- α) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του ορθογωνίου της κλάσης [10,12) είναι 5.
 β) Στο ιστόγραμμα των $f_i\%$ το ύψος του ορθογωνίου της κλάσης [16,18) είναι 20.
 γ) Στο κυκλικό διάγραμμα το τόξο που αντιστοιχεί στην κλάση [14,16) είναι 144° .

Αν οι μαθητές που πήραν βαθμούς της κλάσης [12, 14) είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που οι βαθμοί τους ανήκουν στην κλάση [18,20), να δείξετε ότι :

- i) Το πλάτος των κλάσεων είναι 2
 ii) Οι μαθητές με βαθμό στην κλάση [18 , 20) είναι τρεις
 iii) Να γίνει πίνακας κατανομής συχνοτήτων με στήλες για τα v_i , N_i , $f_i\%$, $F_i\%$

Λύση**i)**

Αφού το εύρος της κατανομής είναι $R = 20 - 10 = 10$ και το πλήθος των κλάσεων είναι 5, το πλάτος κάθε κλάσης θα είναι $\frac{10}{5} = 2$.

ii)

Οι κλάσεις λοιπόν είναι [10,12), [12,14), [14,16), [16,18), [18,20)

(α) $\Rightarrow v_1 = 5$

(β) $\Rightarrow f_4\% = 20 \Rightarrow f_4 = 0,2$ και επειδή $v = 50$, θα έχουμε

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 10$$

(γ) $\Rightarrow$ τόξο $\alpha_3 = 144^\circ$
 αλλά $\alpha_3 = 360^\circ f_3 \Rightarrow 144^\circ = 360^\circ f_3$

$$f_3 = \frac{144^\circ}{360^\circ} = 0,4$$

$$\frac{v_3}{50} = 0,4 \Rightarrow v_3 = 20$$

Αλλά $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 50$ και από υπόθεση $v_2 = 4v_5$, οπότε

$$5 + 4v_5 + 20 + 10 + v_5 = 50 \Rightarrow 5v_5 = 15 \Rightarrow v_5 = 3 \text{ και επομένως } v_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

iii)

Μετά από αυτά ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι

Κλάσεις [,)	Συχνот. v_i	Σχτ.συχν $f_i\%$	Αθρ.συχ N_i	Αθρ.σχ.συχ. $F_i\%$
[10,12)	5	10	5	10
[12 ,14)	12	24	17	34
[14 ,16)	20	40	37	74
[16 ,18)	10	20	47	94
[18 ,20)	3	6	50	100
Σύνολο	50	100		

17.

Στις εξετάσεις ενός μαθήματος πήραν μέρος 40 φοιτητές . Οι 12 από αυτούς πήραν βαθμό κάτω από 4 και οι 4 κάτω από 2. Το 40% των φοιτητών βαθμολογήθηκε με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 4, αλλά μικρότερο του 6. Η γωνία του κυκλικού διαγράμματος για τους φοιτητές που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 είναι 36° . Η κλίμακα της βαθμολογίας είναι από 0 έως 10 με βάση το 5

- Να φτιάξετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών επί % συχνοτήτων
- Να βρείτε πόσοι φοιτητές πέρασαν το μάθημα
- Αν οι φοιτητές με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 7 πάρουν υποτροφία, να βρείτε ποιο ποσοστό των φοιτητών θα πάρει υποτροφία.

Λύση**i)**

Είναι προφανές ότι οι βαθμοί των φοιτητών είναι χωρισμένοι στις κλάσεις $[0, 2)$, $[2, 4)$, $[4, 6)$, $[6, 8)$ και $[8, 10)$.

Αφού κάτω από 4 πήραν βαθμό 12 φοιτητές εκ των οποίων 4 κάτω από 2 είναι φανερό ότι η συχνότητα της πρώτης κλάσης $[0, 2)$ είναι $v_1 = 4$, ενώ της δεύτερης κλάσης $[2, 4)$ είναι $v_2 = 8$.

Στην τρίτη κλάση $[4, 6)$ βρίσκεται το 40% των φοιτητών, δηλαδή η συχνότητα της κλάσης αυτής είναι $v_3 = \frac{40}{100} \cdot 40 = 16$.

Επειδή η γωνία του τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση $[8, 10)$ είναι 36°

$$\text{θα έχουμε } 36^\circ = 360^\circ \frac{v_5}{40} \Rightarrow v_5 = 4$$

$$\text{Αλλά } v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 40 \Rightarrow 4 + 8 + 16 + v_4 + 4 = 40 \Rightarrow v_4 = 8$$

i)

Ο πίνακας συχνοτήτων είναι

Κλάσεις [,)	Συχνοτ. v_i	Σχ.συχν $fi\%$
$[0, 2)$	4	10
$[2, 4)$	8	20
$[4, 6)$	16	40
$[6, 8)$	8	20
$[8, 10)$	4	10
Σύνολο	40	100

ii)

Για να περάσει ένας φοιτητής το μάθημα, θα πρέπει να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 5.

Επομένως οι φοιτητές που πέρασαν το μάθημα είναι όσοι βρίσκονται στις δύο τελευταίες κλάσεις καθώς επίσης και οι μισοί από αυτούς που βρίσκονται στην κλάση $[4, 6)$.

Από την κλάση $[4, 6)$ παίρνουμε τους μισούς φοιτητές επειδή το 5 είναι το κέντρο και σε κάθε κλάση έχουμε δεχτεί ότι οι τιμές είναι ισοκατανεμημένες.

Επομένως πέρασαν το μάθημα $8 + 8 + 4 = 20$ φοιτητές.

iii)

Το ποσοστό των φοιτητών που θα πάρουν υποτροφία είναι το 10% της κλάσης

$[8, 10)$ και το μισό του ποσοστού της κλάσης $[6, 8)$, δηλαδή επίσης 10%,

άρα το 20% των φοιτητών θα πάρει υποτροφία.

18.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα (Οι κόκκινοι χαρακτήρες είναι τα δεδομένα του προβλήματος),

xi	vi	fi	Ni	Fi	fi%	Fi%
1	1	0,05	1	0,05	5	5
2	4	0,20	5	0,25	20	25
3	6	0,30	11	0,55	30	55
4	3	0,15	14	0,70	15	70
5	6	0,30	20	1	30	100
Σύνολο	20	1	 	 	100	

Λύση

$$F_1 = 0,05 \Rightarrow f_1 = 0,05$$

$$\text{Επειδή } f_1\% = 100 f_1 \Rightarrow f_1\% = 100 \cdot 0,05 = 5$$

$$\text{Επειδή } F_1\% = 100 F_1 \Rightarrow F_1\% = 100 \cdot 0,05 = 5$$

Η αθροιστική συχνότητα της μεγαλύτερης τιμής x_5 είναι $N_5 = 20$, άρα το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20$

$$f_1 = \frac{v_1}{n} \Rightarrow 0,05 = \frac{v_1}{20} \Rightarrow v_1 = 1 \text{ άρα και } N_1 = 1.$$

$$\text{Προφανώς είναι } N_5 = 20, \quad F_5 = 1 \text{ και } F_5\% = 100$$

$$F_4\% = 70 \Rightarrow 100 F_4 = 70 \Rightarrow F_4 = 0,7$$

$$\text{Αλλά } F_5\% = F_4\% + f_5\% \Rightarrow 100 = 70 + f_5\% \Rightarrow f_5\% = 30$$

άρα και $f_5 = 0,3$

$$\text{Όμως } f_5 = \frac{v_5}{n} \Rightarrow 0,3 = \frac{v_5}{20} \Rightarrow v_5 = 6$$

$$N_5 = N_4 + v_5 \Rightarrow 20 = N_4 + 6 \Rightarrow N_4 = 14$$

$$N_4 = N_3 + v_4 \Rightarrow 14 = 11 + v_4 \Rightarrow v_4 = 3$$

$$f_4 = \frac{v_4}{n} \Rightarrow f_4 = \frac{3}{20} = 0,15 \Rightarrow f_4\% = 15$$

$$f_3\% = 30 \Rightarrow f_3 = 0,3$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Rightarrow 0,05 + f_2 + 0,3 + 0,15 + 0,3 = 1 \Rightarrow f_2 = 0,2$$

άρα και $f_2\% = 20$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 0,05 + 0,20 = 0,25$$

$$F_3 = F_2 + f_3 = 0,25 + 0,30 = 0,55$$

$$\text{Οπότε και } F_2\% = 25 \text{ και } F_3\% = 55$$

$$f_3 = \frac{v_3}{n} \Rightarrow 0,3 = \frac{v_3}{20} \Rightarrow v_3 = 6$$

$$f_2 = \frac{v_2}{n} \Rightarrow 0,2 = \frac{v_2}{20} \Rightarrow v_2 = 4$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 1 + 4 = 5$$

19.

100 άτομα ρωτήθηκαν πόσες φορές πήραν ταξί σ' έναν χρόνο. Τα δεδομένα φαίνονται στον πίνακα.

- Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων με όλες τις γνωστές στήλες.
- Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα και τα αντίστοιχα πολύγωνα σχετικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.
- Ποιο ποσοστό των ατόμων πήρε το πολύ 30 φορές ταξί και ποιο τουλάχιστον 18;

Φορές που πήραν ταξί	Αριθ. ατόμων
0	2
10	15
18	35
30	25
35	12
45	8
50	3

Λύση

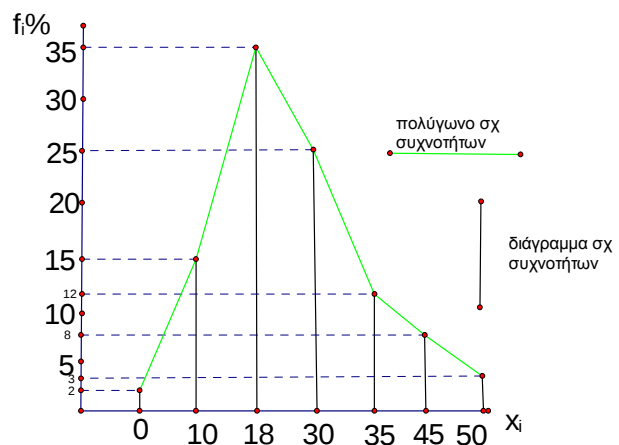
i)

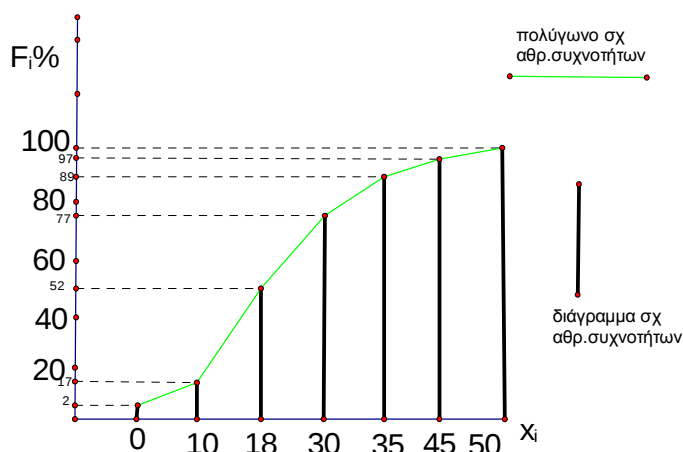
Χρησιμοποιώντας το τυπολόγιο κατασκευάζουμε τον πίνακα

x_i	v_i	f_i	N_i	Fi	$f_i \%$	$Fi\%$
0	2	0,02	2	0,02	2	2
10	15	0,15	17	0,17	15	17
18	35	0,35	52	0,52	35	52
30	25	0,25	77	0,77	25	77
35	12	0,12	89	0,89	12	89
45	8	0,08	97	0,97	8	97
50	3	0,03	100	100	3	100
σύνολο	100	1,00			100	

ii)

Σχόλιο 5





iii)

Από τη στήλη των $f_i\%$, το πολύ 30 φορές πήρε ταξί το $2 + 15 + 35 + 25 = 77\%$
 Όπως επίσης τουλάχιστον 18 φορές πήρε ταξί το $35 + 25 + 12 + 8 + 3 = 83\%$

20.

Το διπλανό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στους ορόφους των κτισμάτων κάποιας πόλης.

- α) Να βρείτε το ποσοστό των κτιρίων που έχουν από 3 ορόφους και πάνω.
 β) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα για το πλήθος των ορόφων.

Λύση

α)

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% + f_6\% = 100 \Leftrightarrow$$

$$x + 4x + 4x + 2x + 6x + 3x = 100 \Leftrightarrow$$

$$20x = 100 \Leftrightarrow x = 5$$

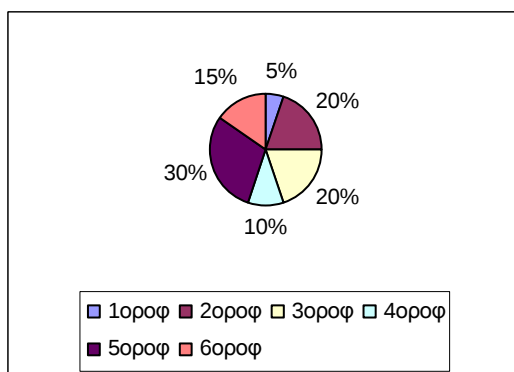
Το ποσοστό των κτηρίων από 3 ορόφους και πάνω είναι

$$4x + 2x + 6x + 3x = 15x = 15 \cdot 5 = 75\%$$

ii)

Κυκλικό διάγραμμα

Σχόλιο 6



21.

Στα σχολεία ενός δήμου υπηρετούν 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας τους δίνεται στο διπλανό πίνακα.

i) Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον

15 χρόνια υπηρεσίας;

ii) Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια :

α) Πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν

μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα

5 χρόνια ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία να μείνει ο ίδιος ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Χρόνια υπηρεσίας	Σχ συχ fi %
[0 , 5)	10
[5 , 10)	15
[10 , 15)	12
[15 , 20)	15
[20 , 25)	18
[25 , 30)	18
[30 , 35)	12

Λύση

i)

Συμπληρώνουμε τον παραπάνω πίνακα με τη στήλη συχνοτήτων.

Χρόνια υπηρεσίας	Σχ συχ fi %	Συχνοτ. vi
[0 , 5)	10	10
[5 , 10)	15	15
[10 , 15)	12	12
[15 , 20)	15	15
[20 , 25)	18	18
[25 , 30)	18	18
[30 , 35)	12	12

$$v_1 = \frac{10}{100} \cdot 100 = 10, \quad v_2 = \frac{15}{100} \cdot 100 = 15 \quad \text{κ.λ.π}$$

Τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας έχουν οι εκπαιδευτικοί που ανήκουν στις κλάσεις

4^η, 5^η, 6^η, 7^η δηλαδή $15 + 18 + 18 + 12 = 63$

ii)

α) Για να πάρει σύνταξη ένας εκπαιδευτικός μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια, θα πρέπει σήμερα να έχει τουλάχιστον 22,5 χρόνια υπηρεσίας .

Τουλάχιστον 22,5 χρόνια υπηρεσίας έχουν :

- οι μισοί εκπαιδευτικοί της κλάσης [20 , 25) λόγω της ισοκατανομής, δηλαδή 9
 - οι εκπαιδευτικοί των δύο επόμενων κλάσεων, δηλαδή $18 + 12 = 30$
- Σύνολο 39

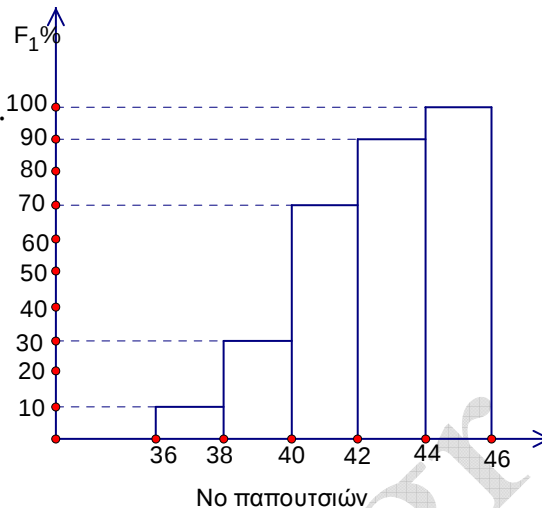
β) Την επόμενη πενταετία θα πάρουν σύνταξη όσοι εκπαιδευτικοί βρίσκονται στην τελευταία κλάση, δηλαδή 12

Επομένως για να μην μεταβληθεί το πλήθος των εκπαιδευτικών θα πρέπει να προσληφθούν 12 .

22.

Το διπλανό ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων αναφέρεται στο νούμερο παπουτσιών 150 ανθρώπων.

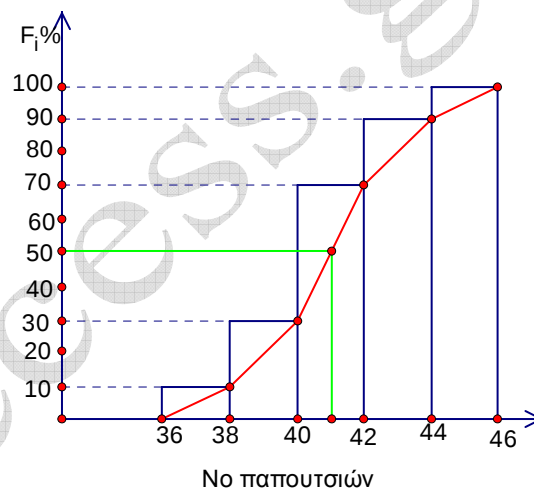
- Σχεδιάστε το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.
- Τι ποσοστό του δείγματος φοράει παπούτσια από 36 έως και 39.
- Αν ξεχωρίσουμε από τους 150 τους 75 με τα μεγαλύτερα νούμερα παπουτσιών, από πόσο νούμερο και πάνω θα φοράνε αυτοί;

**Λύση**

α)

Το ζητούμενο πολύγωνο είναι η κόκκινη γραμμή

Σχόλιο 11



β) Είναι

$$F_2 = F_1 + f_2 \Rightarrow F_2 \% = F_1 \% + f_2 \%$$

$$30 = 10 + f_2 \%$$

$$f_2 \% = 20$$

Επειδή οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση είναι ισοκατανεμημένες από το 20% των παρατηρήσεων το 10% θα φοράει νούμερο παπουτσιών από 38 μέχρι 39.

Επομένως από 36 έως 39 φοράει το $10 + 10 = 20\%$ του δείγματος

γ)

Επειδή τα 75 άτομα είναι το 50% του δείγματος όπως φαίνεται από το παραπάνω πολύγωνο το 50% φοράει νούμερο παπουτσιών μέχρι 41 (πράσινη γραμμή) και το υπόλοιπο από 41 και πάνω.

Άρα τα 75 άτομα με τα μεγαλύτερα νούμερα φοράνε από 41 νούμερο και πάνω .

23.

Κάθε ένας από τους 80 μαθητές ενός σχολείου δαπανά στο κυλικείο από 0 μέχρι 10 ευρώ.

Από αυτούς 16 δαπανούν κάτω από 2 ευρώ,

30 δαπανούν κάτω από 4

8 δαπανούν πάνω από 8

και 30 δαπανούν πάνω από 6.

i) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων απολύτων και αθροιστικών.

ii) Πόσοι δαπανούν πάνω από 5 ευρώ;

iii) Πόσοι δαπανούν από 3 μέχρι 9 ευρώ;

iv) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.

Λύση

i)

Επειδή δεν ξέρουμε το ποσό που δαπανά ο κάθε μαθητής αλλά ξέρουμε το εύρος της δαπάνης για ομάδες μαθητών θα κάνουμε ομαδοποίηση των παρατηρήσεων.

Είναι φανερό, από τα δεδομένα ότι πρέπει να κάνουμε ομαδοποίηση παίρνοντας σαν κλάσεις τις $x_1 = [0, 2)$, $x_2 = [2, 4)$, $x_3 = [4, 6)$, $x_4 = [6, 8)$ και $x_5 = [8, 10)$

16 δαπανούν κάτω από 2 $\Rightarrow v_1 = 16$

30 δαπανούν κάτω από 4 $\Rightarrow N_2 = 30$,

$$\text{Αλλά } N_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow 30 = 16 + v_2 \\ v_2 = 14$$

8 δαπανούν πάνω από 8 $\Rightarrow v_5 = 8$

$$30 \text{ δαπανούν πάνω από } 6 \Rightarrow v_4 + v_5 = 30 \Rightarrow v_4 + 8 = 30 \\ v_4 = 22$$

$$\text{Είναι } v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 80 \Rightarrow 16 + 14 + v_3 + 22 + 8 = 80 \\ v_3 = 20$$

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι ο παρακάτω

Κλάσεις x_i	Συχντ v_i	Σχετ. συχν f_i	Αθρ. συχν. N_i	Σχετ. αθρ συχν F_i
[0 , 2)	16	0,200	16	0,200
[2 , 4)	14	0,175	30	0,375
[4 , 6)	20	0,250	50	0,625
[6 , 8)	22	0,275	72	0,900
[8 , 10)	8	0,100	80	1
σύνολο	80	1		

ii) Το 5 είναι το κέντρο της κλάσης [4 , 6) της οποίας η συχνότητα είναι 20 , επειδή οι παρατηρήσεις είναι ισοκατανεμημένες στην κλάση , οι 10 μαθητές θα ξοδεύουν από 5 μέχρι 6 ευρώ οπότε

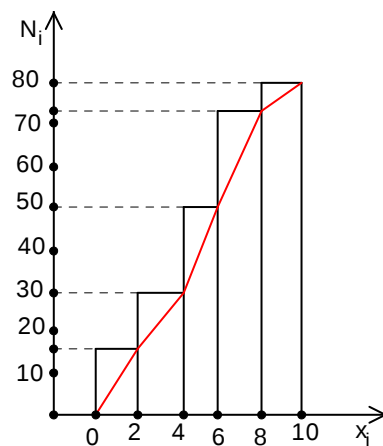
πάνω από 5 ευρώ ξοδεύουν οι $10 + 22 + 8 = 40$ μαθητές

iii)

Με την ίδια σκέψη βρίσκουμε ότι από 3 μέχρι 9 ευρώ δαπανούν οι $8 + 14 + 20 + 22 + 4 = 68$ μαθητές

iii)

Ιστόγραμμα και πολύγωνο
αθροιστικών συχνοτήτων



24.

Η βαθμολογία 50 μαθητών σ' ένα μάθημα κυμάνθηκε από 10 έως 20.

Χωρίζουμε τους 50 βαθμούς σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους

$$x_1 = [10, 12), \quad x_2 = [12, 14), \quad x_3 = [14, 16), \quad x_4 = [16, 18) \quad \text{και} \quad x_5 = [18, 20).$$

- Δίνεται ότι :
- α) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του ορθογωνίου της κλάσης $[10, 12)$ είναι 5
 - β) Στο ιστόγραμμα των $f_i\%$ το ύψος του ορθογωνίου της κλάσης $[16, 18)$ είναι 20,
 - γ) Στο κυκλικό διάγραμμα το τόξο που αντιστοιχεί στην κλάση $[14, 16)$ είναι 144° .
 - δ) Οι μαθητές που πήραν βαθμούς της κλάσης $[12, 14)$ είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που οι βαθμοί τους είναι στην κλάση $[18, 20)$

- Να δείξετε ότι :
- i) Το πλάτος των κλάσεων είναι 2
 - ii) Οι μαθητές με βαθμό στην κλάση $[18, 20)$ είναι τρεις
 - iii) Να γίνει πίνακας κατανομής συχνοτήτων με στήλη των α_i

Λύση**i)**

Το πλάτος των κλάσεων προφανώς είναι 2

$$c = \frac{R}{\kappa} = \frac{10}{5} = 2$$

ii), iii)

Κλάσεις	Συχν v_i	Σχετ.συχν f_i	Σχετ.συχ $f_i\%$	Τόξο τομ. α_i σε μοίρες
$[10, 12)$	5	0,10	10	36,0
$[12, 14)$	$4v_5 = 12$	0,24	24	86,4
$[14, 16)$	20	0,40	40	144,0
$[16, 18)$	10	0,20	20	72,0
$[18, 20)$	$v_5 = 3$	0,06	6	21,6
Σύνολο	50	1,00	100	360,0

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$$v_1 = 5, \quad f_4\% = 20, \quad \alpha_3 = 144 \quad \text{και} \quad v_2 = 4v_5 \quad \text{τότε :}$$

$$v_4 = \frac{20}{100} \cdot 50 = 10$$

$$\alpha_3 = 360^\circ f_3 \Leftrightarrow 144^\circ = 360^\circ \frac{v_3}{v}$$

$$144 = 360^\circ \frac{v_3}{50} \Leftrightarrow v_3 = 20$$

$$5 + 4v_5 + 20 + 10 + v_5 = 50 \Leftrightarrow v_5 = 3$$

Από τον τύπο $\alpha_i = 360^\circ f_i$ βρίσκουμε την στήλη των α_i όπως φαίνεται παραπάνω

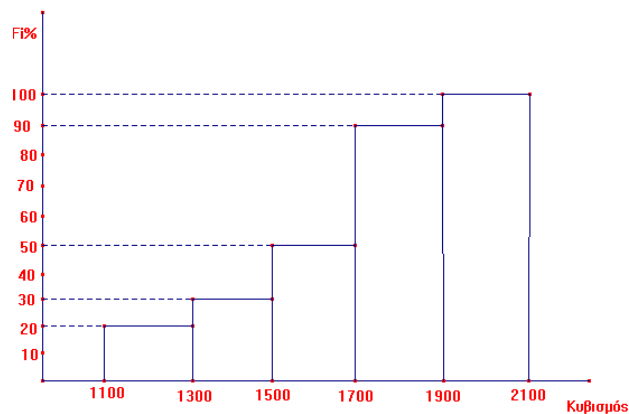
25.

Στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων παρουσιάζεται το ποσοστό των αυτοκινήτων που παράγει μία βιομηχανία σ' ένα μήνα σε σχέση με τον κυβισμό του κινητήρα.

Το πλήθος των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο ή ίσο από 1700 και μικρότερο από 1900 cm^3 είναι 2500.

Να βρείτε :

- Το πλήθος των αυτοκινήτων που παράγει η βιομηχανία σ' ένα μήνα.
- Το πλήθος των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο ή ίσο από 1600 cm^3

**Λύση**

i)

$$\text{Είναι } F_4 \% = F_3 \% + f_4 \% \Leftrightarrow 90 = 50 + f_4 \Leftrightarrow f_4 = 40 \%$$

$$\text{Έστω } n \text{ το μέγεθος του δείγματος, Τότε } \frac{40}{100} \cdot n = 2500 \Leftrightarrow n = 6250$$

ii)

$$F_5 \% = F_4 \% + f_5 \% \Leftrightarrow 100 = 90 + f_5 \% \Leftrightarrow f_5 \% = 10$$

$$F_3 \% = F_2 \% + f_3 \% \Leftrightarrow 50 = 30 + f_3 \% \Leftrightarrow f_3 \% = 20$$

Η σχετική συχνότητα των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο ή ίσο από τα 1600 κυβικά είναι $\frac{f_3}{2} \% + f_4 \% + f_5 \% = 10 + 40 + 10 = 60$

$$\text{Το πλήθος των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο ή ίσο από 1600 κυβικά είναι } \frac{60}{100} \cdot 6250 = 3750 .$$

26.

Οι απουσίες στο πρώτο τετράμηνο των μαθητών της Γ τάξης ενός σχολείου έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα

Απουσίες	Κέντρο κλάσης	f_i
[..., ..)		0,1
[., 7)		
[. , ..)		0,3
[., ..)	10	
Σύνολο		

Δίνεται επίσης ότι η σχετική συχνότητα της 4^{ης} κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2^{ης} κλάσης

- i) Να αποδείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι ίσο με 2
 ii) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Λύση

Σχόλιο 9 -10

i)

Αν c είναι το πλάτος των κλάσεων, τότε η τρίτη κλάση είναι η $[7, 7+c)$

η τέταρτη κλάση είναι η $[7+c, 7+2c)$

Το κέντρο της τέταρτης κλάσης είναι $\frac{7+c+7+2c}{2} = \frac{14+3c}{2}$

και επειδή από την υπόθεση αυτό είναι ίσο με 10, θα έχουμε $\frac{14+3c}{2} = 10 \Leftrightarrow$
 $14+3c = 20 \Leftrightarrow$
 $c = 2$

ii)

Το αριστερά άκρο της δεύτερης κλάσης θα είναι το $7-c = 7-2 = 5$

Άρα η πρώτη κλάση θα είναι η $[3, 5)$,

η δεύτερη $[5, 7)$

η τρίτη $[7, 9)$ και η τέταρτη $[9, 11)$

Ακόμα έχουμε $f_4 = 2f_2$ και $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$
 $0,1 + f_2 + 0,3 + 2f_2 = 1$
 $f_2 = 0,2$ άρα $f_4 = 0,4$

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω

Απουσίες	Κέντρο κλάσης	f_i
[3, 5)	4	0,1
[5, 7)	6	0,2
[7, 9)	8	0,3
[9, 11)	10	0,4
Σύνολο		1

27.

Στην αρχή της σχολικής χρονιάς 50 μαθητές ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν το καλοκαίρι .

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα

i) Να βρείτε το α

ii) Να συμπληρώσετε την στήλη των v_i και τον πίνακα με στήλη των $f_i\%$

iii) Να βρείτε πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον 3 βιβλία

iv) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ 2 βιβλία

Αριθμ Βιβλίων x_i	Αριθμ Μαθητών v_i
0	$\alpha + 4$
1	$5\alpha + 8$
2	4α
3	$\alpha - 1$
4	2α
Σύνολο	50

Λύση

i)

$$\alpha + 4 + 5\alpha + 8 + 4\alpha + \alpha - 1 + 2\alpha = 50 \Leftrightarrow 13\alpha = 30 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

ii)

Συμπληρωμένος ο πίνακας γίνεται

Αριθμ Βιβλίων x_i	Αριθμ Μαθητών v_i	Σχ.συχν $f_i\%$
0	7	14
1	23	46
2	12	24
3	2	4
4	6	12
Σύνολο	50	100

iii)

Τουλάχιστον τρία βιβλία σημαίνει από 3 και πάνω : $2 + 6 = 8$

iv)

Το πολύ δύο βιβλία σημαίνει από 2 και κάτω.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι $24 + 46 + 14 = 84\%$

28.

Η βαθμολογία, με άριστα το 10,
250 φοιτητών δίνεται στον πίνακα
Το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό
όχι μικρότερο του 6 είναι 36%
Το ποσοστό με βαθμό μικρότερο του 5
είναι 54% .

Να βρείτε

- i) Τις συχνότητες κ και λ .
- ii) Το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται
από τον οριζόντιο άξονα και το πολύγωνο των συχνοτήτων
- iii) Αν για να πάρει βραβείο ένας φοιτητής πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 7,
να βρείτε ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών που πήραν βραβείο.

Κλάσεις [,)	Συχνότητα v_i
0 - 2	70
2 - 4	κ
4 - 6	λ
6 - 8	λ
8 - 10	κ
Σύνολο	250

Λύση

i)

Βαθμός όχι μικρότερος του 6 σημαίνει από 6 και πάνω : $\left(\frac{\lambda}{250} + \frac{\kappa}{250} \right) \cdot 100 = \frac{2\lambda + 2\kappa}{5}$

$$\text{και από υπόθεση } \frac{2\lambda + 2\kappa}{5} = 36 \Leftrightarrow$$

$$\lambda + \kappa = 90 \quad (1)$$

Το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μικρότερο του 5 είναι

$$\left(\frac{\frac{\lambda}{2} + \kappa + 70}{250} \right) \cdot 100 = \frac{\lambda}{5} + \frac{2\kappa}{5} + 28 \quad \text{και από υπόθεση}$$

$$\frac{\lambda}{5} + \frac{2\kappa}{5} + 28 = 54 \Leftrightarrow \lambda + 2\kappa = 130 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\lambda = 40$ και $\kappa = 50$

ii)

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος,
άρα ίσο με 250 τ.μ

Σχόλιο 11

iii)

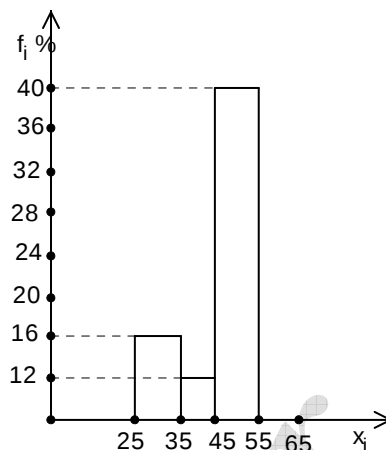
Τουλάχιστον 7 έχουν οι μισοί φοιτητές της κλάσης [6, 8) και όσοι είναι στην κλάση [8, 10)

Αυτοί είναι $20 + 50 = 70$ και το ποσοστό αυτών είναι $\frac{70}{250} \cdot 100 = 28\%$

29.

Οι ηλικίες των καθηγητών ενός σχολείου δίνονται στο διπλανό ιστόγραμμα σχετικών % συχνοτήτων, από το οποίο λείπει ο ιστός της κλάσης $[55, 65)$.

- Να βρείτε το ποσοστό των καθηγητών που έχουν ηλικία μεγαλύτερη ή ίση των 55.
- Να βρεθεί το ποσοστό των καθηγητών που έχουν ηλικία $[30, 45) \cup [55, 65)$.
- Αν οι καθηγητές που έχουν ηλικία x με $35 \leq x < 55$ είναι 26, να βρείτε το πλήθος των καθηγητών του σχολείου.

**Λύση****i)**

$$f_1 \% + f_2 \% + f_3 \% + f_4 \% = 100 \Leftrightarrow 16 + 12 + 40 + f_4 = 100 \Leftrightarrow f_4 \% = 32$$

ii)

Το ζητούμενο ποσοστό είναι $8 + 12 + 32 = 52\%$

Σχόλιο 9

iii)

Το ποσοστό των καθηγητών με ηλικία στο $[35, 55)$ είναι $12 + 40 = 52\%$

Αν v είναι το πλήθος των καθηγητών του σχολείου τότε $\frac{52}{100} \cdot v = 26 \Leftrightarrow$

$$v = 50$$

30.

Ένα δείγμα 60 μπαταριών έχει διάρκεια ζωής σε ώρες αυτή που φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

- Να βρείτε τις συχνότητες που λείπουν
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα με στήλη των $f_i\%$
- Να βρείτε το ποσοστό των μπαταριών με διάρκεια ζωής τουλάχιστον 58 ώρες
- Να βρείτε το ποσοστό των μπαταριών με διάρκεια ζωής μικρότερη από 60 ώρες
- Να βρείτε το ποσοστό των μπαταριών με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη ή ίση των 59 ωρών
- Να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων και το πολύγωνο των σχετικών % συχνοτήτων
- Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και το πολύγωνο των σχετικών % συχνοτήτων

Κλάσεις [,)	Συχνότητες v_i
50-54	x
54-58	9
58-62	$2x$
62-66	15
66-70	$3x$
Σύνολο	60

Λύση**i)**

$$x + 9 + 2x + 15 + 3x = 60 \Leftrightarrow 6x = 36 \Leftrightarrow x = 6$$

Οι συχνότητες που λείπουν είναι $v_1 = 6$, $v_3 = 2 \cdot 6 = 12$, $v_5 = 3 \cdot 6 = 18$

ii)

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

Κλάσεις [,)	Συχνότητες v_i	Σχετ. συχν $f_i\%$
50-54	6	10
54-58	9	15
58-62	12	20
62-66	15	25
66-70	18	30
Σύνολο	60	100

iii)

$$20 + 25 + 30 = 75\%$$

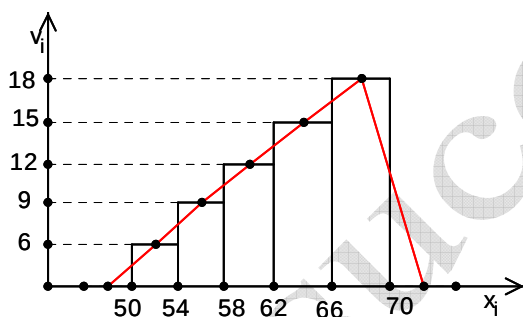
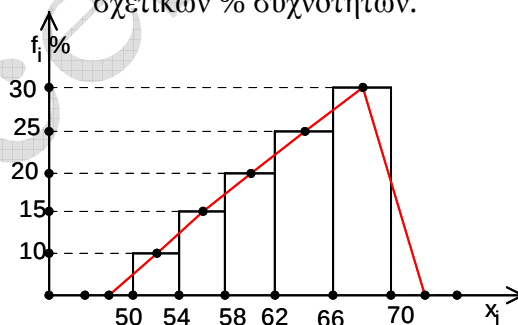
iv)

$$10 + 15 + 10 = 35\%$$

v)

$$\frac{3}{4} \cdot 20 + 25 + 30 = 70\%$$

vi)

Ιστόγραμμα και πολύγωνο
συχνοτήτων.Ιστόγραμμα και πολύγωνο
σχετικών % συχνοτήτων.

vii)

Το εμβαδόν της ζητούμενης περιοχής είναι ίσο με 100 τ.μ